Tentamen van Lineaire Algebra, 27 augustus 2003, 9-12 uur

Schrijf je naam + student nummer op ieder vel. Bij elke vraag wordt argumentatie verwacht.

Opgave 1: Neem het vlak V in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking $x+y+z=0$, en $P:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de loodrechte projectie op V.
a) Wat zijn het bereik en de kern van P? Laat zien dat $P^2 = P$.
b) Wat zijn de eigenwaarden en -ruimtes van P?
c) Gebruik b) om $P((10, 20, 30))$ te vinden.

Opgave 2: Laat $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de rotatie om de oorsprong zijn over een hoek ϕ (tegen de klok in).
a) Geef de matrixvoorstelling $[T]_\beta$ van T t.o.v. de standaardbasis β.
b) Is $[T]_\beta$ diagonaliseerbaar?
c) Gebruik de matrixvoorstelling van twee rotaties om te bewijzen dat

$$\cos(\phi+\psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\ \sin\psi.$$

Opgave 3: Gegeven de differentiaalvergelijking

$$y'' - 6y' + 5y = 26\sin t.$$

a) Los de homogene vergelijking op.
b) Los de gehele vergelijking op met beginwaarden $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$.
c) Orthogonaliseer de in a) verkregen oplossingen ten opzichte van het inproduct

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Opgave 4: Met de letters a, b en c kun je uiteraard 3^n woorden van n letters maken. Nu leggen we een extra beperking op dat bb, cc en ac niet mogen voorkomen. Dus *aaaaaa* en *abcabc* zijn nog steeds toegestane 6-letterwoorden, maar *cbacba* niet.
a) Stel een A op die uitdrukt welke letters opelkaar mogen volgen (dus een matrix zodanig dat $A\cdot(100)^t$ aangeeft welke letters op a mogen volgen), en reken de eigenwaarden uit.
b) Diagonaliseer A.
c) Hoeveel woorden kun je maken bij $n = 10$ en $n = 20$?
d) Leg met behulp van de eigenvector behorende bij de grootste eigenwaarde uit wat in het algemeen de verdeling van de a, b en c zal zijn in een woord van lengte n.